

Total number of printed pages-12

63/1 (SEM-5) DSE1A/PHYRE5016

2023

**PHYSICS**

Paper : PHYRE5016

**(Mathematical Physics)**

Full Marks : 60

Pass Marks : 24

Time : Three hours

**The figures in the margin indicate full marks for the questions.**

1. Choose the correct options from the following : **(any five)** 1×5=5

নিম্নোক্ত প্রশ্নসমূহৰ শুদ্ধ বিকল্প নির্ণয় কৰা : (যিকোনো পাঁচটা)

- (a) The integrating factor of the differential

equation  $\frac{dy}{dx} + xy = 2x$  is—

$\frac{dy}{dx} + xy = 2x$  অবকলেজীয় সমীকৰণটোৰ

অনুকলনীয় ফেক্টৰটো হ'ল—

(i)  $e^{\frac{x^2}{2}}$

Contd.

(ii)  $e^{x/2}$

(iii)  $e^{-x/2}$

(iv)  $e^{\frac{2x}{3}}$

(b) The value of  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$  is—

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$  ৰ মান হব—

(i)  $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(ii)  $\sqrt{\pi}$

(iii)  $-2\sqrt{\pi}$

(iv)  $\frac{\pi}{3}$

(c) The modulus of the product of two complex numbers is the—

দুটা কাল্পনিক সংখ্যাৰ গুণফলৰ পৰম মান হব—

(i) sum of their moduli

সংখ্যা দুটাৰ পৰম মানৰ যোগফল

(ii) product of their moduli

সংখ্যা দুটাৰ পৰম মানৰ গুণফল

(iii) division of their moduli

সংখ্যা দুটাৰ পৰম মানৰ ভাগফল

(iv) None of the above

ওপৰৰ এটাও নহয়

(d) A partial differential equation has—

এটা অবকলেজীয় সমীকৰণ

(i) one independent variable

এটা স্বতন্ত্র চলক থাকে

(ii) more than one dependent variable

এটাতকৈ বেছি নির্ভৰশীল চলক থাকে

(iii) two or more independent variables

দুটা বা ততোধিক স্বতন্ত্র চলক থাকে

(iv) no independent variable

কোনো স্বতন্ত্র চলক নেথাকে

(e) In the Legendre's polynomial

$$P_5(x) = \lambda \left( x^5 - \frac{70}{63} x^3 + \frac{15}{63} x \right), \lambda \text{ is given}$$

as—

লিজেণ্ডাৰ পলিনমিয়েল

$$P_5(x) = \lambda \left( x^5 - \frac{70}{63}x^3 + \frac{15x}{63} \right) \text{ ৰ } \lambda \text{ ৰ মান}$$

হব—

(i)  $\frac{63}{2}$

(ii)  $\frac{63}{5}$

(iii)  $\frac{63}{8}$

(iv)  $\frac{63}{10}$

(f) The generating function for Bessel's function is given as—

বেচেল ফলনৰ জেনেৰেটিং ফলন হব—

(i)  $e^{\frac{x}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right)}$

(ii)  $e^{-\frac{x}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right)}$

(iii)  $e^{\frac{x}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right)}$

(iv)  $e^{\frac{x}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right)}$

(g) For exact differential equation of the form  $Mdx + Ndy = 0$ , which one is correct ?

$Mdx + Ndy = 0$  যথাযথ অবকলনীয় সমীকরণটোৰ ক্ষেত্ৰত, তলৰ কোনটো সত্য?

(i)  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

(ii)  $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$

(iii)  $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}$

(iv)  $\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial x} = 0$

(h) If  $f(x)$  is even function, then Fourier integral of  $f(x)$  reduces to—

যদি  $f(x)$  এটা যুগ্ম ফলন হয়, তেন্তে  $f(x)$  ৰ ফৰিয়াৰ নিম্নজলৈ সীমাবদ্ধ হয়—

(i) cosine integral (cosine অনুকলন)

(ii) sine integral (sine অনুকলন)

(iii) complex integral (কাল্পনিক অনুকলন)

(iv) harmonic integral (হাৰমোনিক অনুকলন)

(i) The value of the integral  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$  is—

$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$  ৰ মান হ'ব—

(i)  $\sqrt{\pi}$

(ii)  $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

(iii)  $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(iv)  $\frac{\pi}{2}$

(j) A periodic function is a function which—

এটা পর্যাবৃত্ত ফলন এনেধৰণ হয় যে—

(i) has a period  $T = 2\pi$   
পর্যায়কাল  $T = 2\pi$

(ii) satisfies  $f(t+T) = f(t)$   
 $f(t+T) = f(t)$  হয়

(iii) satisfies  $f(t+t) = -f(t)$   
 $f(t+T) = -f(t)$  হয়

(iv) has a period  $T = \pi$

এনে পর্যায়কাল পোৱা যায় যে  $T = \pi$  হয়

2. Answer **any five** of the following questions :

2×5=10

যিকোনো পাঁচটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ লিখা :

(a) Using Beta function, prove that  $\beta(m, n) = \beta(n, m)$ .

বিটা ফলন ব্যৱহাৰ কৰি, প্ৰমাণ কৰা যে

$$\beta(m, n) = \beta(n, m) \text{।}$$

(b) Find the values of the Legendre polynomials  $P_0(x)$  and  $P_1(x)$  using generating function.

জেনেৰেটিং ফলন ব্যৱহাৰ কৰি  $P_0(x)$  আৰু

$P_1(x)$  ৰ লিজেণ্ডাৰ পলিনমিয়েল উলিওৱা।

(c) What do you mean by order and degree of a differential equation? Explain with examples.

অবকলেজীয় সমীকৰণৰ মাত্ৰা আৰু ঘাত বুলিলে কি বুজা? উদাহৰণসহ ব্যাখ্যা কৰা।

(d) Find the modulus and argument of the complex number  $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$ .

কাল্পনিক সংখ্যা  $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$  ৰ পৰম মান আৰু কোণাক্ষৰ নিৰ্ণয় কৰা।

(e) Prove the relation

প্রমাণ কৰা যে

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}} \times \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin\theta} d\theta = \pi.$$

(f) Check the exactness of the differential equation

$$(x + \sin y) dx + (x \cos y - 2y) dy = 0$$

$$(x + \sin y) dx + (x \cos y - 2y) dy = 0$$

অবকলেজীয় সমীকৰণৰ যথাযথতাৰ সমতা নিৰূপণ কৰা।

(g) Check if  $x=0$  is an analytic point or not for the differential equation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 + 2)y = 0.$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 + 2)y = 0 \text{ অবকলেজীয়}$$

সমীকৰণটো  $x=0$  বিন্দুত বিশ্লেষণাত্মক হয়নে নহয় প্রমাণ কৰা।

3. Answer **any five** of the following questions :  
5×5=25

যিকোনো পাঁচটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ লিখিবা :

(a) Show that (প্রমাণ কৰা যে)

$$P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$$

(b) Solve the differential equation given below in terms of complementary function and particular integral :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 6 \frac{dy}{dx} + 9y = e^{3x}$$

$\frac{d^2 y}{dx^2} + 6 \frac{dy}{dx} + 9y = e^{3x}$  অবকলেজীয় সমীকৰণটো পৰিপূৰক ফলন আৰু বিশেষ অনুকুলনৰ সহায়ত সমাধান কৰা।

(c) Evaluate  $\int_0^{\infty} x^{-t} t^{7/2} dt$  using the property of  $\Gamma$  function.

$\Gamma$  ফলনৰ ধৰ্ম ব্যৱহাৰ কৰি  $\int_0^{\infty} x^{-t} t^{7/2} dt$  ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(d) Solve the differential equation given below :

তলত দিয়া অবকলেজীয় সমীকৰণটো সমাধান কৰা :

$$(8y - x^2 y) \frac{dy}{dx} + (x - xy^2) = 0.$$

(e) Show that

$$|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$$

where all the  $z$  are complex number.

সকলোবোৰ  $z$  কাল্পনিক সংখ্যাৰ ক্ষেত্ৰত প্ৰমাণ কৰা যে

$$|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$$

(f) Define an analytic function. Write down the necessary and sufficient conditions for a function  $f(z)$  to be analytic at point  $z$ .

এটা বিশ্লেষণাত্মক ফলনৰ সংজ্ঞা দিয়া।  $f(z)$  ফলন বিশ্লেষণাত্মক হবলৈ প্ৰয়োজনীয় আৰু পৰ্যাপ্ত চৰ্তবোৰ লিখা।

(g) Find the half range cosine series of the

$$\text{function } f(x) = \begin{cases} 4 & \text{if } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{if } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{if } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{if } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases} \text{ ফলনৰ cosine}$$

অণুক্ৰমৰ অৰ্ধপৰিসৰ নিৰ্ণয় কৰা।

(h) Establish the relation between the beta and gamma functions.

বিটা আৰু গামা ফলনৰ মাজৰ সম্বন্ধ প্ৰতিষ্ঠা কৰা।

(i) Express  $J_6(x)$  in terms of  $J_0(x)$  and  $J_1(x)$ , using the Bessel's recurrence relation.

বেচেলৰ পুনঃপৌণিক সম্বন্ধ ব্যৱহাৰ কৰি  $J_6(x)$  ক  $J_0(x)$  আৰু  $J_1(x)$  ৰ সহায়ত প্ৰকাশ কৰা।

4. Answer **any two** of the following :

10×2=20

তলৰ যিকোনো দুটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ লিখা :

(a) Obtain the Fourier series expansion of function  $f(x) = (\pi - x)^2$ ,  $0 < x < 2\pi$  and

$$\text{prove that } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$f(x) = (\pi - x)^2, 0 < x < 2\pi \text{ যা ফলনক}$$

ফৰিয়াৰ শ্ৰেণী সম্প্ৰসাৰণ কৰা আৰু প্ৰমাণ কৰা যে

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(b) Solve the Laplace equation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \text{ which satisfies the}$$

conditions  $U(0, y) = U(x, 0) = U(l, y) = 0$

$$\text{and } U(x, a) = \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

লাপলচ সমীকৰণ  $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$  সমাধান কৰা,

য'ত  $U(0, y) = U(x, 0) = U(l, y) = 0$

আৰু  $U(x, a) = \sin \frac{n\pi x}{l}$  চৰ্ত সিদ্ধ হয়।

(c) Prove that (প্রমাণ কৰা যে)

$$\beta\left(\frac{m+1, n}{m}\right) = \frac{\beta(m, n+1)}{n} = \frac{\beta(m, n)}{m+n}.$$

(d) Apply calculus of residues to prove that

অবশিষ্ট উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি প্রমাণ কৰা যে

$$(i) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

$$(ii) \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cos(\sin \theta - n\theta) \theta = \frac{2\pi}{n!}$$

where  $n$  is a positive integer.